2.5.10 Kvadratický trojčlen

Předpoklady: 020501, 020503, 020508, 020509

Kvadratický trojčlen je každý trojčlen, který je možné zapsat ve tvaru ax^2+bx+c, kde $a\neq 0$.

Odkud ho známe?

- levá strana kvadratické rovnice
- předpis kvadratické funkce

Co je vlastně kvadratický trojčlen?
Výraz, který zastupuje nekonečně mnoho čísel, která získáme, když do trojčlenu dosazujeme konkrétní čísla za *x*.

- Ptáme se: „Kdy se trojčlen rovná nule?“ $\Rightarrow$ kvadratická rovnice.
- Ptáme se: „Jak se mění hodnoty trojčlenu pro různá *x*?“ $\Rightarrow$ kvadratická funkce.

Vlastně celou kapitolu probíráme různé aplikace kvadratického trojčlenu.

Co budeme dělat přímo s trojčlenem?

Hledání maxima a minima

Př. 1: Urči, jaké minimální nebo maximální hodnoty může dosáhnout kvadratický trojčlen x^2-6x+2.

Hodnoty kvadratického trojčlenu sledujeme pomocí funkce $\Rightarrow$ hledáme maximum nebo minimum kvadratické funkce $y=x^2-6x+2$ (to už umíme).
Graf funkce $y=x^2-6x+2$ je „ďolík“ $\Rightarrow$ nemá maximální hodnotu.
Minimální hodnota = minimum funkce.
$y=x^2-6x+2=x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2-3^2+2=(x-3)^2-7$.
Nejmenší hodnotou, které může trojčlen x^2-6x+2 dosáhnout, je –7 pro $x=3$.

Př. 2: Urči, jaké minimální nebo maximální hodnoty může dosáhnout kvadratický trojčlen $-2x^2-6x-10$.

Graf funkce $y=-2x^2-6x-10$ je „kopeček“ $\Rightarrow$ nemá minimální hodnotu.
Maximální hodnota = maximum funkce.

$$y=-2x^2-6x-10=-2\left(x^2+3x\right)-10=-2\left[x^2+2x\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]-10=$$
$$=-2\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]-10=-2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}-10=-2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{11}{2}.$$

Největší hodnotou, které může trojčlen $-2x^2-6x-10$ dosáhnout, je $-\frac{11}{2}$ pro $x=-\frac{3}{2}$.

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu poměrně často studenti dělají chybu v tom, že vtáhnou –10 do závorky a pak zapomenou číslo, které zbude po doplnění na čtverec, vynásobit ze závorky ven.

Rozklad na součin

Při rozkladu využíváme kořeny kvadratické rovnice odpovídající trojčlenu. Pokud má kvadratická rovnice $x^2 + px + q = 0$ kořeny x_1 a x_2, můžeme kvadratický trojčlen $x^2 + px + q$ rozložit na součin $(x - x_1)\cdot(x - x_2) = 0$.

Proč to funguje, jsme si říkali minule.

Na co je to dobré?

Řešení rovnic, krácení zlomků …

Př. 3: Rozlož na součin kvadratický trojčlen $x^2 - 5x + 6$.

Kořeny rovnice $x^2 - 5x + 6 = 0$: $x_1 = 2; x_2 = 3$.

$$\underbrace{x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)}_{}$$

$$(x - x_1)(x - x_2)$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

Př. 4: Rozlož na součin kvadratický trojčlen $2x^2 + 10x + 12$.

Kořeny rovnice $2x^2 + 10x + 12 = 0: x_1 = -2; x_2 = -3$

První nápad: $2x^2 + 10x + 12 = [x - (-2)][x - (-3)] = (x+2)(x+3)$. Nechybí tam dvojka?

Zpětné roznásobení: $(x+2)(x+3) = x^2 + 2x + 3x + 6 = x^2 + 5x + 6 \Rightarrow$ musíme závorky ještě vynásobit koeficientem *a*.

Správné řešení:

$$(x - \ x_1) \ (x - \ \ x_2)$$

$$2x^2 + 10x + 12 = 2[x - (-2)][x - (-3)] = 2(x+2)(x+3)$$

Př. 5: Rozlož na součin kvadratický trojčlen $x^2 + 4x + 4$.

Kořeny rovnice $x^2 + 4x + 4 = 0$: $x_1 = x_2 = -2$.

$$(x - \ x_1) \ (x - \ \ x_2)$$

$$x^2 + 4x + 4 = [x - (-2)][x - (-2)] = (x+2)(x+2) = (x+2)^2$$

Př. 6: Rozlož na součin kvadratický trojčlen $x^2 + x + 3$.

Kořeny rovnice $x^2 + x + 3 = 0$: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{-11}}{2}$.

Kořeny rovnice neexistují $\Rightarrow$ trojčlen $x^2 + x + 3 = 0$ nelze rozložit.

Př. 7: Sestav přehlednou tabulku, která zachycuje, jak závisí rozklad kvadratického trojčlenu na kořenech odpovídající kvadratické rovnice.

Rozklad kvadratického trojčlenu ax^2+bx+c závisí na řešení kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$ takto:

Kvadratická rovnice $ax^2+bx+c=0$ má:	Kvadratický trojčlen ax^2+bx+c rozložíme:
2 kořeny $x_1;x_2$	$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$
1 kořen x_1	$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$
Žádný kořen	nelze rozložit

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad má smysl jen tehdy, když se studenti opravdu sami pokusí srovnat výsledky předchozích příkladů a roztřídit je do konzistentních skupin. Zejména roztřídění trojčlenů, které jdou rozložit, není na první pohled jednoznačné. Oprávněně se na první pohled jeví i rozdělení podle toho, zda se mimo závorky vyskytuje ještě koeficient *a*, ale jednak toto rozdělení neodpovídá různým případům řešení kvadratické rovnice a jednak je možné bez problémů koeficient vtáhnout do jedné nebo po rozdělení i obou závorek.

Př. 8: Najdi všechny kvadratické rovnice, které mají kořeny $\frac{2}{7};-\frac{1}{3}$

Známe kořeny $\Rightarrow$ známe rozklad na součin, z něj roznásobením získáme rovnici:

$$(x-x_1)(x-x_2)=\left(x-\frac{2}{7}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=x^2+\frac{1}{3}x-\frac{2}{7}x-\frac{2}{21}=x^2+\frac{1}{21}x-\frac{2}{21}=0$$

Kořeny se nezmění, když rovnici vynásobíme nenulovým číslem (zbavíme se zlomků):

$$x^2+\frac{1}{21}x-\frac{2}{21}=0 \quad /\cdot 21$$

$21x^2+x-2=0$ jiná rovnice, ale stejné kořeny.

Stejně jako jsme násobili 21, mohli jsme násobit jakýmkoliv jiným nenulovým číslem a kořeny rovnice by se nezměnily $\Rightarrow$

Hledané rovnice jsou: $a(21x^2+x-2)=0 \qquad a\in R-\{0\}$

Pedagogická poznámka: Než prozradíte studentům, kteří nevyřeší příklad sami, řešení, zkuste jim pomoci tím, že jim připomenete, aby si vzpomněli, co všechno o rovnici vědí, když už znají její kořeny.

Př. 9: Rozlož na součin kvadratický trojčlen:

a) $-x^2+x+12$ b) $10x^2+39x+14$ c) $-12x^2+5x+2$

d) $12x^2-19x+\frac{15}{2}$ e) x^2+3x+1 f) $x^2+x-2x\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$

a) kořeny rovnice $x^2-x-12=0$: $x_1=4;x_2=-3$

$$-x^2+x+12=-(x^2-x-12)=-(x+3)(x-4)$$

b) kořeny rovnice $10x^2+39x+14$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-39\pm\sqrt{39^2-4\cdot10\cdot14}}{2\cdot10}=\frac{-39\pm31}{20}$$

$$\Rightarrow\ x_1=-\frac{8}{20}=-\frac{2}{5},\ x_2=-\frac{70}{20}=-\frac{7}{2}$$

$$10x^2+39x+14=10\left(x+\frac{2}{5}\right)\left(x+\frac{7}{2}\right)=(5x+2)(2x+7)$$

c) kořeny rovnice $12x^2-5x-2=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot12\cdot(-2)}}{2\cdot12}=\frac{5\pm11}{24}$$

$$\Rightarrow\ x_1=\frac{16}{24}=\frac{2}{3},\ x_2=-\frac{6}{24}=-\frac{1}{4}$$

$$-12x^2+5x+2=-12\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{4}\right)=-(3x-2)(4x+1)$$

d) kořeny rovnice $12x^2-19x+\frac{15}{2}$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-19)\pm\sqrt{(-19)^2-4\cdot12\cdot\frac{15}{2}}}{2\cdot12}=\frac{19\pm1}{24}$$

$$\Rightarrow\ x_1=\frac{20}{24}=\frac{5}{6},\ x_2=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$$

$$12x^2-19x+\frac{15}{2}=12\left(x-\frac{5}{6}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)=(6x-5)\left(2x-\frac{3}{2}\right)$$

e) kořeny rovnice $x^2+3x+1=0$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$x^2+3x+1=\left[x-\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\right]\left[x-\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\right]=\left(x+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$$

f) kořeny rovnice $x^2+x-2x\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$

$$x_{1,2}=\frac{-\left(1-2\sqrt{2}\right)\pm\sqrt{\left(1-2\sqrt{2}\right)^2-4\cdot1\cdot\left(-\sqrt{2}\right)}}{2\cdot1}=\frac{-1+2\sqrt{2}\pm\sqrt{1-4\sqrt{2}+8+4\sqrt{2}}}{2}=$$

$$=\frac{-1+2\sqrt{2}\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1+2\sqrt{2}\pm3}{2}$$

$$x_1=\frac{-1+2\sqrt{2}+3}{2}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}\qquad x_2=\frac{-1+2\sqrt{2}-3}{2}=\frac{-4+2\sqrt{2}}{2}=-2+\sqrt{2}$$

$$x^2+x-2x\sqrt{2}+\sqrt{2}=\left(x-\left[1+\sqrt{2}\right]\right)\left(x-\left[-2+\sqrt{2}\right]\right)=\left(x-1-\sqrt{2}\right)\left(x+2-\sqrt{2}\right)$$

Pedagogická poznámka: Jakmile studenti začnou používat na rozklady vzorec pro kořeny kvadratické rovnice, zapomenou psát do rozkladů koeficient a. Je potřeba jim připomínat, že trojčlen není rovnice a vynásobením se změní jeho hodnota.

Př. 10: Petáková:
strana 13/cvičení 14 d) g) k) o) p) r)
strana 13/cvičení 15 c) h)
strana 13/cvičení 16 a) b)

Shrnutí: